数理解析研究所講究録
961巻 1996年 112-116

Transcendence measures for almost all numbers

群馬大学工学部 天羽雅昭 (Masaaki Amou)

本講演のテーマは"2次元ルベグ測度の意味で、ほとんどすべての超越数がもつ超越測度について"である。

先ず、超越測度の定義を述べておこう。ω を超越数とする。$(d, H) \in \mathbb{N}^2$ に対して、$\mathcal{P}(d,H)$ で、次数が d 以下，高さが H 以下の整数係数多項式の全体を表わす。但し、多項式の高さとは、係数の絶対値の最大値のことである。このとき、

$$\Phi(\omega; d, H) := \min_{\substack{P \in \mathcal{P}(d,H) \\ P \neq 0}} |P(\omega)|$$

で定義される (d,H) の関数を、ω の超越測度と呼ぶ（一般に、$\Phi(\omega;d,H) \geqq \phi(\omega;d,H)$ をみたす ϕ をすべて、ω の超越測度と呼ぶ）。

ディリクレの部屋割り論法によって、任意の超越数 ω に対して

$$(*) \quad \Phi(\omega; d, H) \leqq \begin{cases} \exp(-d \log H + c(\omega) d), & \omega \in \mathbb{R} \\ \exp(-\frac{d-1}{2} \log H + c(\omega) d), & \omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \end{cases}$$

が成り立つことがわかる（$c(\omega)$ は ω のみに依る正の定数）。

我々は、次の問題を考える。

<u>問題</u>　2次元ルベグ測度の意味で，ほとんどすべての超越数ωに対して、$\Phi(\omega; d, H)$のなるべく大きな下界を求めよ。

次数dを固定して考えた場合には、Sprindžuk [8] による次の結果がある：$\varepsilon > 0$を任意とする。$d \in \mathbb{N}$を任意にとって固定したとき、1次元ルベグ測度の意味で，ほとんどすべての実数ωに対して

$$\Phi(\omega; d, H) \geqq \exp\left(-(d+\varepsilon)\log H\right)$$

が，$H \geqq c(\omega, d, \varepsilon)$のときに成り立ち、2次元ルベグ測度の意味で、ほとんどすべての複素数ωに対して

$$\Phi(\omega; d, H) \geqq \exp\left(-\left(\frac{d-1}{2}+\varepsilon\right)\log H\right)$$

が，$H \geqq c(\omega, d, \varepsilon)$のときに成り立つ（$c(\omega, d, \varepsilon)$は、$\omega$, d, εのみによる正の定数）。

これは、(*)の上界と比較して、ほぼ最良の結果である。（これをさらに改良した結果に，[5], Chap. 9 と [6] がある。）

私の得た結果は、次数dも動かして考えた場合の次のような評価である。

<u>定理</u>　$\varepsilon > 0$を任意とする。このとき、2次元ルベグ測度の意味で，ほとんどすべての複素数ωに対して

$$\Phi(\omega; d, H) \geqq \exp\left(-(5.5+\varepsilon)\, d \log((d+1)H) - 3d\log(d+1)\right)$$

が、$\mathrm{Max}(d,H) \geqq c(\omega,\varepsilon)$ のときに成り立つ（$c(\omega,\varepsilon)$ は、ω と ε のみによる正の定数）。

定理の証明には、次の2つの補題が使われる。

<u>補題1</u>（[7], Chap. 2, Lemma 1.12）　$\omega \in \mathbb{C}$, $P(x) \in \mathcal{P}(d,H)$（$P \neq 0$）とし、$\omega$ に一番近い $P(x)$ の根の（1つ）を α とする。α の $P(x)$ での重複度を s とするとき

$$|P(\omega)| \geqq |\omega-\alpha|^s \left(2d^2(d+1)H^2\right)^{-d+1}$$

が成り立つ。

<u>補題2</u>　$(d,H,s) \in \mathbb{N}^3$　$(s \leqq d)$ に対して

$$\mathfrak{A}(d,H,s) := \{\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}\ ;\ \text{ある } P(x) \in \mathcal{P}(d,H) \text{ があって、} P(\alpha)=0 \text{ かつ } \alpha \text{ の } P(x) \text{ での重複度は } s\}$$

と定義する。このとき、$\mathfrak{A}(d,H,s)$ の元の個数 $\#\mathfrak{A}(d,H,s)$ について

$$\#\mathfrak{A}(d,H,s) \leqq 100\, d^2 \left((d+1)H\right)^{6d/s}$$

が成り立つ。

<u>註1</u>　Chudnovsky は、[7], Chap. 2, Remark 7.5 において、補題1を使えば、上記の定理（とほぼ同じもの）が成り立つことを主張し、その証明のスケッチを数行で述べている。しかし、そこには補題2に相当する結果についての言及がない

ので、証明が完成されるようには思えない。このことが，本研究を行なうきっかけになった。

<u>註 2</u>　補題2は、[4], Lemma 2 を使って容易に導くことができる。[4]を執筆中には，そのことに気付かずに，高さ H を固定した場合の弱い結果を Appendix で証明している。

<u>註 3</u>　標数 p ($p \neq 0$) の関数体に対しても、上記と類似の問題が考えられ、それについては、かなりシャープな結果が得られている ([2], [3])。

参考文献

[1] M. Amou, A note on transcendence measures for almost all numbers, preprint.

[2] ———, 関数体上での超越測度についての注意，第4回超越数論研究集会報告集，1 - 15.

[3] ———, A metrical result on transcendence measures in certain fields, to appear in J. Number Theory.

[4] ———, On Sprindžuk's classification of transcendental numbers, to appear in J. reine angew. Math. 470.

[5] A. Baker, Transcendental Number Theory, Cambridge Univ. Press, 1975.

[6] V. I. Bernik, A proof of Baker's conjecture in the

theory of transcendental numbers, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 277 (1984), 1036-1039.

[7] G. V. Chudnovsky, Contributions to the theory of transcendental numbers, Amer. Math. Soc., Mathematical surveys and monographs, no. 19, Providence, R. I., 1984.

[8] V. G. Sprindžuk, Mahler's problem in metrical number theory, Amer. Math. Soc., Translations of mathematical monographs, vol. 25, Providence, R. I., 1969.